Κατανομή Βήτα 28/11/17

Συνάρτηση ή Ολοκλήρωμα Βήτα

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \quad , \alpha>0 \, , \beta>0$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Ορισμός: Η τ.μ. X λέγεται βήτα με παραμέτρους α, β, α>0, β>0 αν το σύνολο τιμών της X είναι $0<x<1$ και η σ.π.π. της X.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \, , & 0<x<1 \\ 0 \, , & \text{σε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Συμβολισμός: $X \sim Be(\alpha,\beta)$

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}_{f(x)} dx = 1$$

Παρατήρηση: (α) Γενίκευση της $U(0,1)$. Αν $\alpha=1$, $\beta=1$, τότε $Be(1,1) = U(0,1)$

Κατανομή Κανονική ή Gauss

de Moivre → όριο διωνυμικής κατανομής

Galton → Ύψος, πλάτος, μήκος, πίεση, χοληστερίνη

Gauss → σφάλματα μετρήσεων

Σύνδεση κανονικής κατανομής Κ.Ο.Θ.:

Αν έχω πολλές παρατηρήσεις μιας (τ.μ.) X τις $x_1, \dots x_n$ (ή πολύ μεγάλο) τότε $\sum_{i=1}^{n} x_i \underset{\sim}{\overset{Κ.Ο.Θ.}{}}$ Κανονική Κατανομή

$$x = \frac{1}{n} \sum x_i$$

Ορισμός: Η τυχαία ~~μεταβλητή~~ κατανομή X λέγεται κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 $(-\infty < \mu < +\infty,\ \sigma^2 > 0)$ αν το σύνολο τιμών της X είναι $-\infty < x < +\infty$ και η σ.π.π. δίνεται από τη σχέση:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma(\sqrt{2\pi})} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \begin{array}{l} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < \mu < +\infty \\ \sigma^2 > 0 \end{array}$$

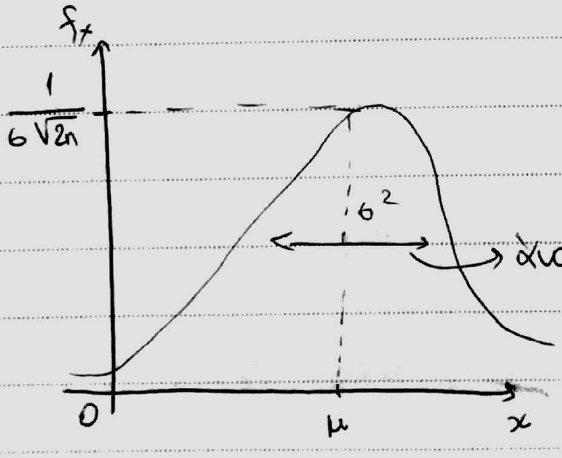
Συμβολισμός: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Παρατηρήσεις: α) Η f_X είναι σ.π.π.;

i) $f_X(x) \geq 0$

ii) Αποδεικνύεται: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ Ολοκλήρωμα Euler: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$



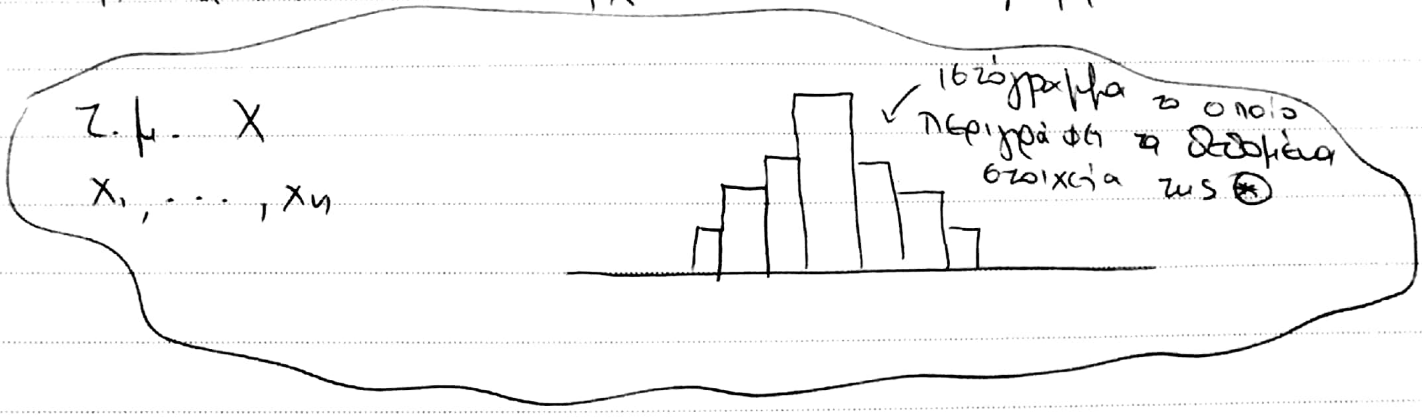
→ άνοιγμα κατανομής

i) Συμμετρική γύρω από το μ

ii) Παίρνει μέγιστο στο $x=\mu$ και το μέγιστο είναι $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

(γ) Η α.σ.κ. της κανονικής $\forall x \in \mathbb{R}: F_X(x) \overset{\text{op}}{=} P(X \leq x)$
$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dt$$

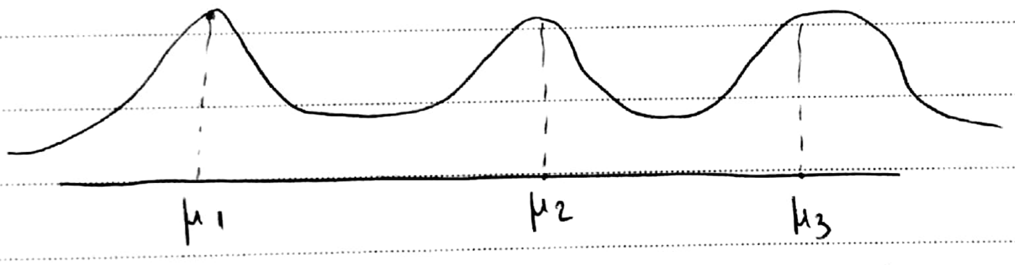
Η α.σ.κ. δεν υπάρχει σε κλειστή μορφή.



δ) Φυσική ερμηνεία των παραμέτρων μ και σ^2

$N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$, $N(\mu_3, \sigma^2)$

$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$



μ = παράμετρος θέσης

$N(\mu, \sigma^2)$, $N(\mu, \sigma^2)$

$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

σ^2 = παράμετρος διασποράς

Παρατηρήσεις - Ιδιότητες. 28/11/17

ε) Αναλλοίωτο της κανονικής κατανομής υπό γραμμικούς μετασχηματισμούς

Πρόταση: Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Τότε η τ.μ. X $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2 \sigma^2)$

Άσκηση 4.6.7: Τροχαία σε διάρκεια μήνα

P(Ενός το πολύ τροχαίου σε ένα μήνα) $= 4P$(2 τροχαίων σε ένα μήνα)

α) P(να μη συμβεί κανένα θανατηφόρο τροχαίο σε ένα μήνα) $= ;$ β) P(το πολύ δύο σε δύο μήνες) $= ;$

γ) Σε έξι μήνες να υπάρχει τουλ. ένα δίμηνο στο οποίο δεν έχει συμβεί θανατηφόρο τροχαίο ατύχημα.

α) $\lambda > 0$

$\lambda = ;$

Έστω X πλήθος ατυχημάτων σε ένα μήνα

$$X \sim P(\lambda)$$

$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

$$P(X \leq 1) = 4P(X=2)$$

$$P(X=0 \text{ ή } X=1) = 4P(X=2)$$

$$P_X(0) + P_X(1) = 4P_X(2)$$

$$\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^1}{1!} = 4\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^2}{2!}$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$, απορ.

$\boxed{\lambda = 1}$

α) $P(X=0) = p_X(0) = \dfrac{e^{-1}1^0}{0!} = e^{-1}$

β) Έστω Y τ.μ. παριστά πλήθος τροχαίων στους 2 μήνες
$Y \sim P(\lambda)$, $\lambda = ;$

1 μήνας $\lambda = 1$
2 μήνες $\lambda = ;$ } $\lambda = 2$ $\quad p_Y(y) = \dfrac{e^{-2}2^y}{y!}$

$P(Y \le 2) = \sum_{y \le 2} p_Y(y) = p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) = 5e^{-2}$

γ) Έστω E = {να μη συμβεί τροχαίο σε ένα οποιοδήποτε από τα 3-δίμηνα}

Έστω Z πλήθος των E στις 3 επαναλήψεις (3 δίμηνα)

$Z \sim B(n=3, p = P(E))$

$p = P(E) = P\left(\begin{smallmatrix}\text{κάποιο τροχαίο}\\ \text{σε ένα δίμηνο}\end{smallmatrix}\right) = P(X=0) = \dfrac{e^{-2}2^0}{0!} = e^{-2}$

$P(Z \ge 1) = 1 - P(Z<1) = 1 - P(Z=0) = 1 - p_Z(0) =$

$= 1 - \binom{3}{0}(e^{-2})^0(1-e^{-2})^{3-0}$

Άσκηση 4.6.9: 2 φορτηγά/ημέρα

α) P(3 φορτηγά σε μια μέρα)

β) P(να μόνο δεκτά προς επισκευή σε μια μέρα)

γ) P(να προσδ. η κατανομή του αριθμού των φορτηγών που επισκευάζονται σε 1 μέρα)

Λύση: $\vdash * \; * \; * \; * \; * \dashv$ $\lambda = 2$

Έστω X πλήθος φορτηγών σε μια μέρα

$X \sim P(\lambda = 2)$

$P_X(x) = \dfrac{e^{-2} 2^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$

α) $P(X=3) = \dfrac{e^{-2} 2^3}{3!}$, β) $P(X>3) = 1 - P(X \leq 3) =$

$= 1 - \sum_{x=0}^{3} \dfrac{e^{-2} 2^x}{x!}$

γ) Έστω Y τ.μ. που παριστά τον αριθμό που θα εξυπηρετηθούν σε μια μέρα. Τιμές $y = 0, 1, 2, 3$

$P_Y(0) = P(Y=0) = P(X=1) = \dfrac{e^{-2} 2^0}{0!}$

$P_Y(1) = P(Y=1) = P(X=1) = \dfrac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!}$

$P_Y(2) = P(Y=2) = P(X=2) = \dfrac{e^{-2} 2^2}{2!}$

$P_Y(3) = P(Y=3) = P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \dfrac{e^{-2} 2^x}{x!} =$

$= 1 - 5e^{-2}$

Άρα $P_Y(y) = \begin{cases} e^{-2}, & y=0 \\ 2e^{-2}, & y=1 \\ 2e^{-2}, & y=2 \\ 1-5e^{-2}, & y=3 \end{cases}$

Scanned by CamScanner